ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΝΤΑΙΦΩΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Από τους 120 μαθητές ενός Λυκείου, οι 24 μαθητές συμμετέχουν σε ένα διαγωνισμό Α, οι 20 μαθητές συμμετέχουν σε ένα διαγωνισμό Β και οι 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής :

1. Να μη συμμετέχει στο διαγωνισμό Α.
2. Να συμμετέχει σε ένα τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς.
3. Να συμμετέχει σε ένα το πολύ διαγωνισμό.
4. Να μη συμμετέχει σε κανένα από τους δύο διαγωνισμούς.
5. Να συμμετέχει μόνο σε ένα από τους δύο διαγωνισμούς.

ΛΥΣΗ

Έστω Α : Το ενδεχόμενο ο μαθητής να συμμετέχει στο διαγωνισμό Α

Έστω Β : Το ενδεχόμενο ο μαθητής να συμμετέχει στο διαγωνισμό Β

Τότε :

$P(A) = \frac{24}{120}$, $P(B) = \frac{20}{120}$, $P(A \cap B) = \frac{12}{120}$

Άρα :

1. $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{24}{120} = \frac{96}{120}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24}{120} + \frac{20}{120} - \frac{12}{120} = \frac{32}{120}$
3. $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{12}{120} = \frac{108}{120}$
4. $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{32}{120} = \frac{88}{120}$
5. $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24}{120} - \frac{12}{120} + \frac{20}{120} - \frac{12}{120} = \frac{20}{120}$

ΘΕΜΑ 2

Στο σύλλογο καθηγητών ενός Λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία ένα καθηγητή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες.

1. Ο καθηγητής να είναι γυναίκα ή φιλόλογος.
2. Ο καθηγητής να είναι γυναίκα και όχι φιλόλογος.
3. Ο καθηγητής να είναι άνδρας και φιλόλογος.
4. Ο καθηγητής να είναι άνδρας ή φιλόλογος.
5. Ο καθηγητής να είναι άνδρας και όχι φιλόλογος.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

Γ : Ο καθηγητής να είναι γυναίκα.

Γ′ : Ο καθηγητής να είναι άνδρας.

Φ : Ο καθηγητής να είναι φιλόλογος.

Γ∩Φ : Ο καθηγητής να είναι γυναίκα φιλόλογος.

Τότε $P(Γ) = \frac{55}{100}$, $P(Φ) = \frac{40}{100}$, $P(Γ∩Φ) = \frac{30}{100}$

Άρα :

1. $P(Γ∪Φ) = P(Γ) + P(Φ) – P(Γ∩Φ) = \frac{55}{100} + \frac{40}{100} - \frac{30}{100} = \frac{65}{100}$
2. $P(Γ∩Φ′) = P(Γ\text{-}Φ) = P(Γ) - P(Γ∩Φ) = \frac{55}{100} - \frac{30}{100} = \frac{25}{100}$
3. $P(Γ′∩Φ) = P(Φ\text{-}Γ) = P(Φ) - P(Γ∩Φ) = \frac{40}{100} - \frac{30}{100} = \frac{10}{100}$
4. $P(Γ′∪Φ) = P(Γ′) + P(Φ) - P(Γ′∩Φ) = 1 - P(Γ) + P(Φ) - P(Γ′∩Φ) = 1 - \frac{55}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{75}{100}$
5. $P(Γ′∩Φ′) = P(Γ∪Φ)′ = 1 - P(Γ∪Φ) = 1 - \frac{65}{100} = \frac{35}{100}$

ΘΕΜΑ 3

Σε μια πόλη 20.000 κατοίκων, κυκλοφορούν δύο εφημερίδες, οι Α και Β. Μια μέρα 2.000 κάτοικοι αγόρασαν την Α, 1.500 κάτοικοι αγόρασαν την Β και 250 κάτοικοι αγόρασαν και τις δύο εφημερίδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο. Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος να έχει αγοράσει :

1. Μία τουλάχιστον εφημερίδα.
2. Καμία εφημερίδα.
3. Μία το πολύ εφημερίδα.
4. Μόνο την εφημερίδα Α.
5. Μόνο μία εφημερίδα.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

Α : Ο κάτοικος αγόρασε την εφημερίδα Α.

Β : Ο κάτοικος αγόρασε την εφημερίδα Β.

Α∩Β : Ο κάτοικος αγόρασε και τις δύο εφημερίδες.

Τότε :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2.000}{20.000} = \frac{1}{10}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1.500}{20.000} = \frac{3}{40}$$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{250}{20.000} = \frac{1}{80}$$

Άρα :

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{3}{40} - \frac{1}{80} = \frac{13}{80}$
2. $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{13}{80} = \frac{67}{80}$
3. $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{80} = \frac{79}{80}$
4. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} - \frac{1}{80} = \frac{7}{80}$
5. $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} - \frac{1}{80} + \frac{3}{40} - \frac{1}{80} = \frac{3}{20}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A_f της f.
2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(e, f(e))$.
4. Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$, για κάθε $x > 0$.
5. Αν $0 < \alpha < \beta < e$ τότε $\beta \ln\alpha < \alpha\ln\beta$.

ΛΥΣΗ

1. $A_f = (0, +\infty)$
2. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

   $f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow x < e$

x	o	e	+∞
f ′		+ 0 -	
f		↗	↘

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Η f παρουσιάζει για $x = e$ τοπικό μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$

3. Έχουμε $f(e) = \frac{1}{e}$ και $f'(e) = 0$. Άρα :

   $y - f(e) = f'(e)(x-e) \Rightarrow y - \frac{1}{e} = 0(x-e) \Rightarrow y - \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{e}$

   άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = \frac{1}{e}$

4. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(e)$. Άρα :

$f(x) \leq f(e) \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Rightarrow e\ln x \leq x \Rightarrow e\ln x \leq x\ln e \Rightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Rightarrow x^e \leq e^x$

5. Η f είναι γνησίως αύξουσα $(0, e]$. Άρα :

$\alpha<\beta \Rightarrow f(\alpha)<f(\beta) \Rightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} < \frac{\ln\beta}{\beta} \Rightarrow \beta\ln\alpha<\alpha\ln\beta$.

ΘΕΜΑ 5

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A_f.
2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
3. Να βρείτε το $\lim_{x\to 3}[f(x)(x^2-1)]$.
4. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της C_f που είναι παράλληλες με την ευθεία y=3x+5.

ΛΥΣΗ

1. $A_f = R - \{-1\}$
2. $f'(x) = \frac{(3x)'(x+1)-3x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_f και δεν έχει ακρότατα.

3. $\lim_{x\to 3}[f(x)(x^2-1)] = \lim_{x\to 3}\left[\frac{3x}{x+1}(x+1)(x-1)\right] = \lim_{x\to 3} 3x(x-1) = 18$

4. Αναζητούμε $x_0 \in R - \{-1\}$ με $f'(x_0)=3$

Όμως $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x_0)=3 \Rightarrow \frac{3}{(x_0+1)^2} = 3 \Rightarrow 3(x_0+1)^2 = 3 \Rightarrow (x_0+1)^2 = 1$

Άρα $x_0=0$ ή $x_0= -2$

Άρα έχουμε δύο σημεία επαφής, τα A(0, f(0))= A(0,0) και B(-2,f(-2)) = B(-2,6) και δύο εφαπτόμενες. Οι εφαπτόμενες είναι :

α) Για A(0,0) : $y-f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y=3x$

β) Για B(-2,6) : $y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \Rightarrow y-6=3(x+2) \Rightarrow y = 3x +12$

ΘΕΜΑ 6

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 40% μαθαίνει γαλλικά ενώ το 10% δεν μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε έναν μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα :

1. Ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες.
2. Ο μαθητής να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες.
3. Ο μαθητής να μαθαίνει μία το πολύ από τις δύο γλώσσες.
4. Ο μαθητής να μαθαίνει αγγλικά αλλά όχι γαλλικά.
5. Ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις παραπάνω γλώσσες.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

Α : Ο μαθητής να μαθαίνει αγγλικά.

Γ : Ο μαθητής να μαθαίνει γαλλικά.

$A' \cap \Gamma' = (A \cup \Gamma)'$: Ο μαθητής δεν μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες.

Τότε :

$P(A) = 80\%$ $\quad$ $P(\Gamma) = 40\%$ $\quad$ $P(A \cup \Gamma)' = 10\%$

Άρα :

1. $P(A \cup \Gamma) = 1 - P(A \cup \Gamma)' = 90\%$
2. $P(A \cap \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cup \Gamma) = 80\% + 40\% - 90\% = 30\%$
3. $P(A \cap \Gamma)' = 1 - P(A \cap \Gamma) = 1 - 30\% = 70\%$
4. $P(A - \Gamma) = P(A) - P(A \cap \Gamma) = 80\% - 30\% = 50\%$
5. $P[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] = P(A) - P(A \cap \Gamma) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = 80\% - 30\% + 40\% - 30\% = 60\%$

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f.

2. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

3. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$.

5. Να δείξετε ότι $x+2 \le e^{x+1}$, για κάθε $x \in R$.

ΛΥΣΗ

1. $D_f = R$

2. $f'(x) = -\frac{x+1}{e^x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -(x+1) = 0 \Rightarrow -x-1=0 \Rightarrow x= -1$

$f'(x)>0 \Rightarrow -x-1>0 \Rightarrow x<-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f ′		+	0	-	
f		↗		↘	

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Για $x = -1$ έχουμε τοπικό μέγιστο το $f(-1)= e$

3. $f(x) + f'(x) = \frac{x+2}{e^x} + \frac{-x-1}{e^x} = \frac{1}{e^x}$

4. Για $x=0 \Rightarrow f(0) = 2$ και $f'(0) = -1$. Άρα :

$y-f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y-2 = -1x \Rightarrow y = -x + 2$

5. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)= e$. Άρα :

$f(x) \le f(-1) \Rightarrow \frac{x+2}{e^x} \le e \Rightarrow x + 2 \le e^x \cdot e \Rightarrow x + 2 \le e^{x+1}$

ΘΕΜΑ 8

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$.

Οι πιθανότητες P(A) και P(B) δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x, στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο. Να δείξετε ότι :

1. $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

2. Αν για τις παραπάνω τιμές P(A), P(B), ισχύει επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες :

   i) $P(A \cap B)$, ii) $P(A-B)$, iii) $P(A \cap B)'$, iv) $P[(A-B) \cup (B-A)]$

3. Τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα. Να το εξηγήσετε.

ΛΥΣΗ

1. $D_f = R$

$f'(x) = 6x^2 - 5x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ή $x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f′		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	
			Τ.ΜΕΓ.		Τ.ΕΛΑΧ.		

Άρα :

$P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

2. i) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

ii) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

iii) $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

iv) $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

3. Αν ήταν ασυμβίβαστα θα έπρεπε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Όμως $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, ενώ $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

<u>ΘΕΜΑ 9</u>

Οι ηλικίες 6 παιδιών είναι : α, α+2, 3, 3, 8, 14 και έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 8$ έτη.

1. Να βρεθεί το α.
2. Να βρεθεί η διάμεσος δ.
3. Να βρεθεί η διακύμανση s^2 και η τοπική απόκλιση s.
4. Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
5. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια τουλάχιστον το δείγμα των ηλικιών των παιδιών θα γίνει ομοιογενές.

<u>ΛΥΣΗ</u>

1. $\bar{x}=8 \Rightarrow \frac{\alpha+\alpha+2+3+3+8+14}{6} = 8 \Rightarrow \ 2\alpha + 30 = 48 \Rightarrow \ 2\alpha = 18 \ \Rightarrow \ \alpha=9$
2. Οι παρατηρήσεις για α=9 γίνονται 9, 11, 3, 3, 8, 14. Τις διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά : 3, 3, 8, 9, 11, 14. Άρα $\delta = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$.
3. $s^2 = \frac{\Sigma\,(ti-\bar{x}\,)^2}{6} = \frac{25+25+1+9+36}{6} = 16$. Άρα $s = \sqrt{16} \ \Rightarrow \ s = 4$
4. $CV = \frac{5}{\bar{x}} = \frac{4}{8} = 0{,}5 > 0{,}10$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
5. Μετά από c έτη οι ηλικίες θα είναι : $y_i = x_i + c \Rightarrow \ \bar{y} = \bar{x} + c \Rightarrow \ \bar{y} = 8 + c$.

Επίσης $s_y = s_x \Rightarrow \ s_y = 4$. Άρα :

$CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{4}{8+c}$. Θα πρέπει $CV_y \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \ \frac{4}{8+c} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \ 40 \leq 8 + c \Rightarrow c \geq 32$ έτη.

ΘΕΜΑ 10

Οι απουσίες των μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Γ.Ε.Λ. κατά τους 4 τελευταίους μήνες έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων. Δίνεται επιπλέον ότι η σχετική συχνότητα της 4ης κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2ης κλάσης f_2. Τότε :

1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2.
2. Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα.
3. Να βρείτε τη μέση τιμή.
4. Να βρείτε τη τυπική απόκλιση s.
5. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Απουσίες	x_i	f_i
[… , …)		0,1
[… , 7)		
[… , …)		0,3
[… , …)	10	
Σύνολο		1

ΛΥΣΗ

Επειδή το άνω άκρο της 2ης κλάσης είναι 7, η 3η κλάση θα είναι [7, 7+c), η 4η κλάση [7 + c, 7 + 2 c]. Όμως η κεντρική τιμή της 4ης κλάσης είναι 10. Άρα :

1. $\frac{(7+c)+\,(7+2c)}{2} = 10 \Rightarrow \quad c = 2$. Άρα οι κλάσεις είναι :

1η κλάση [3,5)

2η κλάση [5,7)

3η κλάση [7,9)

4η κλάση [9,11)

Εξάλλου :

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \xrightarrow{f_4=2f_2} f_1 + f_2 + f_3 + 2\,f_2 = 1 \Rightarrow 0{,}1 + 3\,f_2 + 0{,}3 = 1 \Rightarrow f_2 = 0{,}2$$

Άρα $f_4 = 0{,}4$.

2. Οπότε ο πίνακας γίνεται :

Απουσίες	x_i	f_i
[3 ,5)	4	0,1
[5, 7)	6	0,2
[7 , 9)	8	0,3
[9, 11)	10	0,4
Σύνολο		1

3. $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 4*0{,}1 + 6*0{,}2 + 8*0{,}3 + 10*0{,}4 = 8$

4. $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 v_i}{v} - (\bar{x})^2 =$

$= \sum_{i=1}^{v} x_i^2 f_i - (\bar{x})^2 = 4^2 *0{,}1 + 6^2*0{,}2 + 8^2*0{,}3 + 10^2*0{,}4 - 8^2 = 4$

Άρα $s = \sqrt{4} = 2$

5. $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{8} = 0{,}25 > 0{,}10.$

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ 11

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων μιας κατανομής X οι οποίες έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους.

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	v_i
[... , ...)	6	2
[... , ...)		14
[... , ...)		6
[... , ...)	24	
ΣΥΝΟΛΟ		40

1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.
2. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s.
3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
4. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα (9, 23).

ΛΥΣΗ

1. Αν θεωρήσουμε ότι το κάτω άκρο της $1^{ης}$ κλάσης είναι α και το πλάτος είναι c , τότε οι κλάσεις είναι :

$1^η$ κλάση [α, α+c), η $2^η$ κλάση [α+c, α+2c), η $3^η$ κλάση [α+2c, α+3c) και η $4^η$ κλάση [α+3c, α+4c)

Όμως η κεντρική τιμή της $1^{ης}$ κλάσης είναι 6 και η κεντρική τιμή της $4^{ης}$ κλάσης είναι 24. Άρα :

$$\frac{\alpha+(\alpha+c)}{2} = 6 \Rightarrow \quad 2\alpha + c = 12 \quad (1).$$

Επίσης :

$$\frac{(\alpha+3c)+(\alpha+4c)}{2} = 24 \Rightarrow \quad 2\alpha + 7c = 48 \quad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και βρίσκουμε α=3 και c=6.

Έχουμε $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40 \Rightarrow \quad v_4 = 18$

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	v_i
[3 , 9)	6	2
[9, 15)	12	14
[15 , 21)	18	6
[21, 27)	24	18
ΣΥΝΟΛΟ		40

2. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{40} = \frac{720}{40} = 18$

$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{40} = \frac{1440}{40} = 36$

Άρα $s^2 = \sqrt{36} => \quad s = 6$

3. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} > \frac{1}{10}$

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

4. Έστω ότι στη κλάση [21, 23] έχουμε x παρατηρήσεις.

Επίσης στην κλάση [21, 27) έχουμε 18 παρατηρήσεις.

Άρα θα έχουμε $\frac{27-21}{23-21} = \frac{18}{x} => \quad x = 6.$

Άρα το σύνολο των παρατηρήσεων είναι : 14+6+6 = 26 παρατηρήσεις.

ΘΕΜΑ 12

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και Χ,Ψ δύο ενδεχόμενά του τέτοια ώστε $X \subseteq \Psi$. Έστω ότι οι πραγματικοί αριθμοί Ρ(Χ) και Ρ(Ψ) είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 2$, $x \in R$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Χ), Ρ(Ψ).
3. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(X \cap \Psi)$, $P(X \cup \Psi)$ και $P(\Psi \cap X')$.

ΛΥΣΗ

1. $f'(x)=2(6x^2-5x+1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ή $x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f ′		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	
			Τ.ΜΕΓ.		Τ.ΕΛΑΧ.		

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x = \frac{1}{3}$ τοπικό μέγιστο και για $x = \frac{1}{2}$ τοπικό ελάχιστο.

2. Επειδή $X \subseteq \Psi \Rightarrow P(X) \leq P(\Psi)$, οπότε $P(X) = \frac{1}{3}$ και $P(\Psi) = \frac{1}{2}$

3. Επειδή $X \subseteq \Psi \Rightarrow X \cap \Psi = X \Rightarrow P(X \cap \Psi) = P(X) = \frac{1}{3}$ (3)

   Επειδή $X \subseteq \Psi \Rightarrow X \cup \Psi = \Psi \Rightarrow P(X \cup \Psi) = P(\Psi) = \frac{1}{2}$

   Επίσης :

   $P(\Psi \cap X') = P(\Psi) - P(\Psi \cap X) \Rightarrow$ λόγω της (3) $\Rightarrow$

   $P(\Psi \cap X') = P(\Psi) - P(X) \Rightarrow$

   $P(\Psi \cap X') = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow P(\Psi \cap X') = \frac{1}{6}$

<u>ΘΕΜΑ 13</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Θεωρούμε τις παρατηρήσεις α, β, 3, 4, 7 όπου α, β είναι οι θέσεις του τοπικού μέγιστου και του τοπικού ελάχιστου της f αντίστοιχα. Να βρείτε τα α και β.
3. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$, τη διακύμανση s^2 και τη διάμεσο των παρατηρήσεων του 2ου ερωτήματος.
4. Να εξετάσετε εάν το δείγμα είναι ομοιογενές.

<u>ΛΥΣΗ</u>

1. $f'(x) = 3\,(x^2 - 6x + 5) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = 5$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

Τ.ΜΕΓ. Τ.ΕΛΑΧ.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x = 1$ τοπικό μέγιστο και για $x = 5$ τοπικό ελάχιστο.

2. Με βάση τον πίνακα τιμών προκύπτει ότι : $\alpha = 1$, $\beta = 5$
3. Οι παρατηρήσεις του 2ου ερωτήματος είναι διαταγμένες κατά αύξουσα σειρά ως εξής : 1, 3, 4, 5, 7. Άρα :

$$\bar{x} = \frac{1+3+4+5+7}{5} = 4$$

$$s^2 = \frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x}\,)^2}{5} = \frac{3^2+1^2+0^2+1^2+3^2}{5} = 4$$

Άρα $s = \sqrt{4} = 2$

Η διάμεσος είναι $\delta = 4$.

4. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$ Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

<u>ΘΕΜΑ 14</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + Rx^2 - 9x + \delta$ όπου R και δ το εύρος και η διάμεσος των παρατηρήσεων $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $x_5 = 8$, αντίστοιχα.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(2, f(2)).
3. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη τυπική απόκλιση s_x.
4. Θεωρούμε τα σημεία $A(x_i, y_i)$ με i=1, …, 5 της παραπάνω εφαπτομένης. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV των τιμών y_i με i=1, …, 5.

<u>ΛΥΣΗ</u>

1. Υπολογίζουμε το εύρος $R = x_{max} – x_{min} \Rightarrow R = 8-2 \Rightarrow R=6$.

   Υπολογίζουμε τη διάμεσο των : 2, 4, 5, 6, 8. Άρα δ=5

   Η συνάρτηση γράφεται $f(x) = - x^3 + 6x^2 -9x +5 \Rightarrow$

   $f'(x) = -3x^2 +12x – 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 +12x – 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

   $f'(x) > 0 \Rightarrow -3(x-1)(x-3) >0 \Rightarrow x\in[1,3]$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f ′		−	0	+	0	−	
f		↗		↘		↘	

Τ.ΕΛΑΧ. Τ.ΜΕΓ.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Η f για x=1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f(1) = 1 και για x = 3 τοπικό μέγιστο το f(3) =5.

2. Υπολογίζουμε το f(2) και f′(2). Έχουμε :

   f(2) = 3 και f′(2) = 3. Άρα :

   $y – f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y – 3 = 3x – 6 \Rightarrow y = 3x – 3$

3. $\bar{x} = \frac{2+4+5+6+8}{5} \Rightarrow \bar{x} = 5$

   $s_x^2 = \frac{9+1+0+1+9}{5} \Rightarrow s_x^2 = 4 \Rightarrow s_x = 2$

4. Ισχύει $y_i = 3x_i - 3 \Rightarrow \bar{y} = 3\bar{x} - 3 \Rightarrow \bar{y} = 12$. Επίσης

   $s_y = 3s_x \Rightarrow s_y = 6$. Άρα :

   $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{6}{12} = 50\%$

<u>ΘΕΜΑ 15</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \bar{x}\, x^2 – s^2 x +2$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ (-1, f(1)) έχει εξίσωση y = -24x – 6.

1. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διακύμανση s^2.
2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
3. Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
4. Να βρείτε το μικρότερο $c > 0$ που πρέπει να προστεθεί σε καθεμιά από τις παρατηρήσεις x_i ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

<u>ΛΥΣΗ</u>

1. $f'(x) = -3x^2 + 2\bar{x}x - s^2 \Rightarrow f'(-1) = -3 - 2\bar{x} - s^2$ (1). Όμως :

   $f'(-1) = -24$ (2)

   Από τις (1) και (2) $\Rightarrow -2\bar{x} - s^2 - 3 = -24 \Rightarrow -2\bar{x} - s^2 = 21$ (3)

   Εξάλλου :

   $f(-1) = 1 + \bar{x} + s^2 + 2 \Rightarrow f(-1) = \bar{x} + s^2 + 3$ (4)

   Όμως :

   $f(x) = -24x - 6 \Rightarrow f(-1) = 24 - 6 \Rightarrow f(-1) = 18$ (5)

   Από τις (4)και (5) $\Rightarrow \bar{x} + s^2 + 3 = 18 \Rightarrow \bar{x} + s^2 = 15$ (6)

   Λύνουμε το σύστημα των (3) και (6), δηλαδή :

   $$\left.\begin{array}{l} -2\bar{x} - s^2 = 21 \\ \bar{x} + s^2 = 15 \end{array}\right\}$$

   Άρα $\bar{x} = 6$ και $s^2 = 9$. Συνεπώς $s = 3$.

2. $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

   $f'(x) > 0 \Rightarrow -3(x-1)(x-3) > 0 \Rightarrow x \in [1,3]$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f ′		−	0	+	0	−	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Τ.ΕΛΑΧ. Τ.ΜΕΓ.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Η f για x=1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 2$ και για $x = 3$ τοπικό μέγιστο το $f(3) = -34$.

3. $CV = \dfrac{S_x}{\bar{X}} = \dfrac{3}{6} = 50\%$

   Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

4. Αν προσθέσουμε στις x_i τη σταθερά c, θα προκύψουν οι παρατηρήσεις $y_i = x_i + c$.

   Τότε $\bar{y} = \bar{x} + c \Rightarrow \bar{y} = 6 + c$. Επίσης θα έχουμε $s_y = s_x \Rightarrow s_y = 3$. Θα πρέπει :

   $CV_y \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{3}{6+c} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow 30 \leq 6 + c \Rightarrow c \geq 24.$